MÄLARDALENS HÖGSKOLA
Akademin för utbildning, kultur och kommunikation
Avdelningen för tillämpad matematik
Examinator: Karl Lundengård

TENTAMEN I MATEMATIK
MMA132 Numeriska Metoder
Datum: 4 nov 2013
Skrivtid: 4 timmar

Hjälpmedel: Miniräknare, penna, linjal, radermedel samt formelsamling på 7 sidor som bifogas till tentamen.

Tentamen består utav 5 uppgifter värda upp till 5 poäng stycket. För uppgifter som består av flera delar är maxpoängen för varje del angiven. För att få högsta poäng på en uppgift krävs att ett korrekt och tydligt angivet svar och en klar beskrivning av hur lösningen är strukturerad och vilka ekvationer och samband som används. Uppgifterna är ungefärligt ordnade efter svårighetsgrad.
Betygsgränser: Betyg 3: 12 poäng, Betyg 4: 18 poäng, Betyg 5: 22 poäng, Maxpoäng: 25

1. Låt

$$f(x) = 10\sin(x) - x^3 + 3$$

a) Hitta ett värde a sådant att $f(a) \approx 0$ genom att använda Newton-Raphsons metod. Låt din första gissning vara $a_0 = 0{,}2$ och gör 3 iterationer med metoden. (3 p)

b) Antag att Newton-Raphsons metod konvergerar likformigt i a). Uppskatta felgränsen för den tredje iterationen a_3. (1 p)

c) Använd felgränsen du fick i b) och felfortplantningsformeln för att uppskatta en felgräns för $f(a_3)$. (1 p)

2. Beräkna en approximativ lösning på följande matrisekvation genom att göra två iterationer med Jacobis metod.

$$\begin{pmatrix} 0 & 9 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 6 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 12 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 \\ 22 \\ 19 \\ 65 \end{pmatrix}$$

3. Du håller på att bygga en robot som plockar skräp på stranden. Då roboten inte kan åka särskilt fort i sanden så vill du ta så få turer som möjligt och behöver därför veta ungefär hur mycket skräp som slängs på stranden varje dag.
Genom att titta på bilder så får du fram följande tabell för hur mycket skräp som ligger på stranden under en vecka.

Dag	Mån	Tis	Ons	Tors	Fre	Lör	Sön
Mängd skräp (liter)	5	15	26	34	45	58	66

Om du antar att det kommer ungefär lika mycket skräp varje dag borde datapunkterna i tabellen ligga ungefär längs en rät linje. Om robotens skräpbehållare är lika stor som lutningen på denna linje så kommer roboten att kunna plocka upp ungefär allt skräp på en tur. Använd minsta-kvadrat-metoden för att skaffa en bra uppskattning på linjens lutning.

Fortsätter på andra sidan, Var God Vänd →

4. En av dina farbröder spelar mycket på hästar. För att försöka förutsäga hur det skall gå i ett lopp har han studerat de två favoriterna mycket noggrant och hittat ett sätt att uppskatta vilken hastighet som de två hästarna skall ha under olika delar av loppet.

$$v_1(t) = \frac{4}{3} \cdot (t \sin(t) + t^2)$$

$$v_2(t) = t \tan\left(\frac{t}{3}\right) + te^{\frac{(t-2)^2}{8}}$$

För att ta reda på om häst 1 kommer före häst 2 vill han beräkna integralen

$$S = \int_0^4 v_1(t) - v_2(t)\, dt\,.$$

Beräkna ett ungefärligt värde på S med Simpsons metod. Dela in intervallet [0,4] i 4 delintervall. Naturligtvis räknar din farbror med radianer.
Om S är positivt så kommer häst 1 att vinna. Vilket häst skall din farbror satsa på?

5. betrakta begynnelsevärdesproblemet nedan

$$\begin{cases} y''(x) = x^2 y(x) - 14 - 4y'(x) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

a) Begynnelseproblemet innehåller en andra gradens ordinär differentialekvation. Skriv om det så att det blir ett system med första ordningens differentialekvationer. (1 p)

b) Ge en approximativ lösning av problemet genom att använda Heuns metod och steglängd $h = 0{,}5$.

LYCKA TILL!

Lösningsförslag

1. $f(x) = 10\sin(x) - x^3 + 3$

   a) Newton-Raphsons metod har iterationsformeln

   $$a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)}$$

   Med $f'(x) = 10\cos(x) - 3x^2$ och $a_0 = 0{,}2$ fås:

   $$a_1 = a_0 - \frac{10\sin(a_0) - a_0^3 + 3}{10\cos(a_0) - 3a_0^2} = -0{,}31429$$

   $$a_2 = a_1 - \frac{10\sin(a_1) - a_1^3 + 3}{10\cos(a_1) - 3a_1^2} = -0{,}30774$$

   $$a_3 = a_2 - \frac{10\sin(a_2) - a_2^3 + 3}{10\cos(a_2) - 3a_2^2} = -0{,}30775$$

   b) Om vi har likformig konvergens så kan felet uppskattas med att avrunda $a_3 - a_2 = 0{,}0000115$ uppåt till $E_{a_3} = 0{,}0001$.

   c) Felfortplantningsformeln ger

   $$E_f = |f'(a_3)| \cdot E_{a_3} = |9{,}246| \cdot 0{,}0001 = 0{,}00093$$

2. För att vara säker på att Jacobis metod skall konvergera så skrivs matrisen om så att den blir strikt diagonaldominant:

   $$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 9 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 12 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 35 \\ 65 \\ 22 \end{pmatrix}$$

   Jacobis metod skrivet på matrisform är

   $$\vec{x}_{n+1} = D^{-1}\vec{b} - (L+R)\vec{x}$$

   där

   $$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, L + R = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   Två iterationer med startgissning $\vec{x}_0 = (5{,}5{,}5{,}5)$ ger:

   $$\vec{x}_1 = (-1,\ 1{,}11,\ 0{,}833,\ 1{,}75)$$

   $$\vec{x}_2 = (2{,}38,\ 3{,}22,\ 4{,}66,\ 5{,}26)$$

3. I den här uppgiften skall vi använda minsta-kvadrat-metoden för att hitta a och b för funktionen $y = a + bt$ där y är mängden skräp och t är dagen (numrerad med 1-7). Vi börjar med att ställa upp det överbestämda ekvationsystemet:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \\ 1 & 6 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 15 \\ 26 \\ 34 \\ 45 \\ 58 \\ 66 \end{pmatrix}}_{\vec{y}}$$

Vi ställer sedan upp normalekvationerna

$$A^\top A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = A^\top \vec{y} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 7 & 28 \\ 28 & 140 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 249 \\ 1284 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5{,}57 \\ 10{,}3 \end{pmatrix}$$

Vår uppskattning av linjens lutning är alltså $b = 10{,}3$ liter skräp per dag.

4.

$$v_1(t) = \frac{4}{3} \cdot (t \sin(t) + t^2)$$

$$v_2(t) = t \tan\left(\frac{t}{3}\right) + te^{\frac{(t-2)^2}{8}}$$

$$S = \int_0^4 v_1(t) - v_2(t)\, dt\,.$$

Dela in intervallet i fyra delar ($h = 1$) och använd Simpsons metod:

$$S(h) = \frac{h}{3}(f(0) + 4f(1) + 2f(2) + 4f(3) + f(4))$$

med $f(t) = v_1(t) - v_2(t)$ fås

$$S(1) = 8{,}140$$

vilket är positivt och häst 1 bör alltså vinna.

5.

$$\begin{cases} y''(x) = x^2 y(x) - 14 - 4y'(x) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

a) Döp om funktioner på föjande sätt $y = u$ och $y' = v$. Då fås systemet

$$\begin{cases} u'(x) = v(x) \\ v'(x) = x^2 u(x) - 14 - 4v(x) \\ u(0) = 0 \\ v(0) = 0 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

b) Med steglängd $h = 0{,}5$ så skall vi göra två iterationer med Heuns metod.

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} k_1^u \\ k_1^v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_2^u \\ k_2^v \end{pmatrix}\right)$$

$$\begin{pmatrix} k_1^u \\ k_1^v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} hv(x_0) \\ h(x_0^2 u(x_0) - 14 - 4v(x_0)) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} k_2^u \\ k_2^v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h(v(x_0) + k_1^v) \\ h\left((x_0 + h)^2(u(x_0) + k_1^u) - 14 - 4(v(x_0) + k_1^v)\right) \end{pmatrix}$$

Första iterationen

$$\begin{pmatrix} u_{0,5} \\ v_{0,5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1{,}75 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Andra iterationen

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3{,}5547 \\ -0{,}3281 \end{pmatrix}$$