MÄLARDALENS HÖGSKOLA
Akademin för utbildning, kultur och kommunikation
Avdelningen för tillämpad matematik
Examinator: Karl Lundengård

TENTAMEN I MATEMATIK
MMA132 Numeriska Metoder
Datum: 2 juni 2014
Skrivtid: 4 timmar

Hjälpmedel: Miniräknare, penna, linjal, radermedel samt formelsamling på 7 sidor som bifogas till tentamen.

Tentamen består utav 5 uppgifter värda upp till 5 poäng stycket. För uppgifter som består av flera delar är maxpoängen för varje del angiven. För att få högsta poäng på en uppgift krävs att ett korrekt och tydligt angivet svar och en klar beskrivning av hur lösningen är strukturerad och vilka ekvationer och samband som används. Uppgifterna är ungefärligt ordnade efter svårighetsgrad.
Betygsgränser: Betyg 3: 13 poäng, Betyg 4: 18 poäng, Betyg 5: 22 poäng, Maxpoäng: 25

1. För funktionen $f(x) = 16xe^{-x} + 10$ så gäller $f(0) > 0$ och $f(-1) < 0$.

a) Använd sekantmetoden för att hitta en numerisk lösning till $f(x) = 0$. Använd $x_0 = 0$ och $x_1 = -1$ som initialvärden och utför tre iterationer av metoden. (4 p)

b) Antag att sekantmetoden konvergerar likformigt för problemet i a). Hur många korrekta siffror har din numeriska lösning? (1 p)

2. Använd trapetsmetoden med steglängd $h = 2$ för att beräkna ett approximativt värde på integralen

$$I = \int_0^8 \sin(x) \cdot (1 - x^2) + 40\, dx\,. \qquad (5\text{ p})$$

3. I denna uppgift skall vi hitta en numerisk lösning på följande linjära ekvationssystem:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & -9 & 2 \\ 4 & 4 & 0 & 9 \\ 4 & -10 & 3 & -2 \\ 7 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -17 \\ 17 \end{pmatrix}.$$

a) Välj antingen Jacobis metod eller Gauss-Seidels metod och gör 2 iterationer. Du får själv välja första gissning. (4 p)

b) Verkar din lösning bra eller dålig? Motivera ditt svar. (1 p)

Fortsätter på andra sidan, Var God Vänd →

4. Tänk att x och y har uppmätts enligt tabellen nedan.

x	1	3	5
y	-8	26	92

a) Hitta det 1:a-gradspolynom som passar värdena i tabellen bäst i minsta-kvadrat-mening. (2 p)

b) Hitta det 2:a-gradspolynom som perfekt passar värdena i tabellen. (3 p)

5. I den här uppgiften skall vi undersöka följande differentialekvation:

$$\begin{cases} y''(x) = x \cdot y(x) - x \cdot y'(x) + x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

a) Skriv om differentialekvationen som ett system av 1:a gradens differentialekvationer. (1 p)

b) Beräkna två uppskattningar av $y(2)$ med Heuns metod, en med steglängd $h = 1$ och en med steglängd $h = 0{,}5$. (2 p)

c) Använd Richardson-extrapolation och resultatet ifrån b) för att beräkna en tredje uppskattning av $y(2)$. (2 p)

LYCKA TILL!

Lösningsförslag

1. (a) För sekantmetoden använder vi formeln

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i - x_{i-1}}{f(x_i) - f(x_{i-1})} \cdot f(x_i).$$

Med $f(x) = 16xe^{-x} + 10$ och $x_0 = 0$ och $x_1 = -1$ fås:

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 - \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} \cdot f(x_1) \\ &= -1 - \frac{-1 - 0}{16 \cdot (-1) \cdot e^{-(-1)} - 0} \cdot (16 \cdot (-1) \cdot e^{-(-1)}) = -0{,}2299 \\ x_3 &= x_2 - \frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)} \cdot f(x_2) = -0{,}3363 \\ x_4 &= x_3 - \frac{x_3 - x_2}{f(x_3) - f(x_2)} \cdot f(x_3) = -0{,}4268 \end{aligned}$$

(b) Inga av iterationerna har några gemensamma tal förutom 0:an. Alltså kan vi inte säga att vår approximation har några korrekta siffror ännu.

Svar:

a) $x_4 = -0{,}43$.

b) x_4 har inga korrekta siffror, fler iterationer behövs.

2. För trapetsmetoden används formeln:

$$\tilde{I}(h) = h\left(\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + \dots \ f(x_{n-1}) + \frac{1}{2}f(x_n)\right)$$

Med steglängd $h = 2$ och $0 \leq x \leq 8$ så fås:

$$x_0 = 0,\ x_1 = 2,\ x_2 = 4,\ x_3 = 6,\ x_4 = 8$$

vilket tillsammans med $f(x) = \sin(x) \cdot (1 - x^2) + 40$ ger:

$$\begin{aligned} \tilde{I} &= 2\left(\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \frac{1}{2}f(x_4)\right) \\ &= 2\left(\frac{1}{2} \cdot 40 + 37{,}27 + 51{,}35 + 49{,}78 - \frac{1}{2} \cdot 22{,}33\right) = 294{,}5 \end{aligned}$$

Svar:
Med trapetsmetoden fås $\tilde{I} = 294{,}5$.

3. För att vara säkra på att Jacobis eller Gauss-Seidels metod kommer att konvergera så vill vi skriva om systemet så att vi får en diagonaldominant matris:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & -9 & 2 \\ 4 & 4 & 0 & 9 \\ 4 & -10 & 3 & -2 \\ 7 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -17 \\ 17 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 7 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & -10 & 3 & -2 \\ 3 & 3 & -9 & 2 \\ 4 & 4 & 0 & 9 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 17 \\ -17 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}}_{\vec{b}}.$$

Lösning med Jacobis metod: För att hitta en numerisk approximation med Jacobis metod så använder vi formeln:

$$\vec{x}_{n+1} = D^{-1}\left(\vec{b} - (L+R)\vec{x}_n\right)$$

där D är en matris som har samma element som A på diagonalen och är noll överallt annars och L och R är matriser som har samma elements om A under respektive ovanför diagonalen och nollor överallt annars. I detta fall blir:

$$D = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

För Jacobis metod så kan nästa iteration alltså beräknas genom

$$\vec{x}_{n+1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{-10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{-9} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{9} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 17 \\ -17 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 3 & -2 \\ 3 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{x}_n \right)$$

Vi kan välja vilket initialvärde vi vill, här visas beräkningar med start $\vec{x}_0 = (1{,}1{,}1{,}1)^\top$:

$$\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1{,}5714 \\ 2{,}2000 \\ 0{,}4444 \\ -1{,}5556 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 2{,}1175 \\ 2{,}7730 \\ 0{,}4670 \\ -2{,}3429 \end{pmatrix}$$

Lösning med Gauss-Seidels metod: Definiera D, L, R som för Jacobis metod och använd följande formel:

$$\vec{x}_{n+1} = (D+L)^{-1}\left(\vec{b} - R\vec{x}_n\right)$$

Vi kan välja vilket initialvärde vi vill, här visas beräkningar med start $\vec{x}_0 = (1{,}1{,}1{,}1)^\top$:

$$\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1{,}5714 \\ 2{,}4286 \\ 1{,}1111 \\ -2{,}444 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 2{,}1156 \\ 3{,}3685 \\ 0{,}8404 \\ -3{,}1041 \end{pmatrix}$$

Svar:
Med svartvektor $\vec{x}_0 = (1{,}1{,}1{,}1)^\top$ ger:
Jacobis metod $\vec{x}_2 = (2{,}1175\ ,\ 2{,}7730\ ,\ 0{,}4670\ ,\ -2{,}3429)^\top$
Gauss-Seidels metod $\vec{x}_2 = (2{,}1156\ ,\ 3{,}3685\ ,\ 0{,}8404\ ,\ -3{,}1041)^\top$
Endast en metod behövs för full poäng.

4. a) Vi vill hitta ett 1:a-grads polynom (rät linje), $p_1(x) = a + bx$, som passar värdena i tabellen bäst i minsta-kvadrat-mening. Vi vill alltså hitta minsta-kvadrat-lösningen till följande ekvationer:

$$\begin{cases} a + b = -8 \\ a + 3b = 26 \\ a + 5b = 92 \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -8 \\ 26 \\ 92 \end{pmatrix}}_{\vec{b}}$$

Ställ upp och lös normalekvationerna $A^\top A\vec{x} = A^\top \vec{b}$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 9 & 35 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110 \\ 530 \end{pmatrix} \Leftarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{114}{3} \\ 25 \end{pmatrix}$$

Alltså fås polynomet $p_1(x) = 25x - \frac{114}{3}$.

b) Här vill vi interpolera värdena i tabellen med ett 2:a-gradspolynom $p_2 = a + bx + cx^2$. Vi kan använda antingen Lagrange-interpolation eller Newton-interpolation, båda metoderna ger samma svar.
Lagrange-interpolation: Vi vill hitta ett polynom som uppfyller

$$\begin{cases} a & + & b & + & c & = & -8 \\ a & + & 3b & + & 9c & = & 26 \\ a & + & 5b & + & 25c & = & 92 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 5 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 26 \\ 92 \end{pmatrix}$$

Detta linjära ekvationssystem kan lösas på vanligt sätt

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

alltså är polynomet $p_2(x) = 4x^2 + x - 13$.

Newton-interpolation: Istället för $p_2(x) = a + bx + cx^2$ så skriver vi $p_2(x) = r + s(x-1) + t(x-1)(x-3)$. Då vill vi uppfylla ekvationerna:

$$\begin{cases} r & & & & & = & -8 \\ r & + & 2s & & & = & 26 \\ r & + & 4b & + & 8t & = & 92 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 26 \\ 92 \end{pmatrix}.$$

Detta linjära ekvationssystem kan lösas på vanligt sätt

$$\begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 17 \\ 4 \end{pmatrix}$$

alltså är $p_2(x) = -8 + 17(x-1) + 4(x-1)(x-3) = 4x^2 + x - 13$.

Svar:

a) $p_1(x) = 25x - \frac{114}{3}$

b) $p_2(x) = 4x^2 + x - 13$

5. a) Låt $u(x) = y(x)$ och $v(x) = y'(x)$. Då kan systemets skrivas som

$$\begin{cases} u'(x) = v(x) = f_u(x,v) \\ v'(x) = x \cdot u(x) - x \cdot v(x) + x = f_v(x,u,v) \\ u(0) = 1 \\ v(0) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

b) För Heuns metod så uppskattas värdet på y i nästa steg med formeln:

$$k_1^u = hf_u(x_i,v_i)$$

$$k_1^v = hf_v(x_i,u_i,v_i)$$

$$k_2^u = hf_u(x_i + h,v_i + k_1^v)$$

$$k_2^v = hf_v(x_i + h,u_i,v_i)$$

$$y_{i+1} = y_n + \frac{1}{2}(k_1^u + k_2^u) = u_{i+1}$$

$$y'_{i+1} = y'_n + \frac{1}{2}(k_1^v + k_2^v) = v_{i+1}$$

För att komma från $x = 0$ till $x = 2$ med steglängd $h = 1$ så krävs två steg.

Steg 1:

$$k_1^u = 1 \cdot v(0) = 0$$

$$k_1^v = 1 \cdot (0 \cdot 0 - 0 \cdot 1 + 0) = 0$$

$$k_2^u = 1 \cdot (v(0) + k_1^v) = 0$$

$$k_2^v = 1 \cdot (1 \cdot u(0) - 1 \cdot v(0) + 1) = 2$$

$$u_1 = u(0) + \frac{1}{2}(0 + 0) = 1$$

$$v_1 = v(0) + \frac{1}{2}(0 + 2) = 1$$

Steg 2:

$$k_1^u = 1$$

$$k_1^v = 1$$

$$k_2^u = 2$$

$$k_2^v = 2$$

$$u_1 = 2{,}5$$

$$v_1 = 2{,}5$$

Alltså är $\tilde{y}_1(2) = 2{,}500$.
Med steglängd $h = 0{,}5$ krävs fyra steg:
Steg 1:

$$k_1^u = 0$$

$$k_1^v = 0$$

$$k_2^u = 0$$

$$k_2^v = 0{,}5$$

$$u_1 = 1$$

$$v_1 = 0{,}25$$

Steg 2:

$$k_1^u = 0{,}125$$

$$k_1^v = 0{,}4375$$

$$k_2^u = 0{,}3438$$

$$k_2^v = 0{,}7188$$

$$u_1 = 1{,}234$$

$$v_1 = 0{,}8281$$

Steg 3:

$$k_1^u = 0{,}125$$

$$k_1^v = 0{,}875$$

$$k_2^u = 0{,}5625$$

$$k_2^v = 0{,}75$$

$$u_1 = 1{,}578$$

$$v_1 = 1{,}641$$

Steg 4:

$$k_1^u = 0{,}125$$

$$k_1^v = 1{,}313$$

$$k_2^u = 0{,}7813$$

$$k_2^v = 0{,}5625$$

$$u_1 = 2{,}031$$

$$v_1 = 2{,}578$$

Alltså är $\tilde{y}_{0,5}(2) = 2{,}031$.

c) Om felet för en given uppskattning kan skrivas $\tilde{y}_h - y = c_1 h^{p_1} + c_2 h^{p_2} + \dots$ så blir formeln för Richardsonextrapolation

$$\hat{y}_h = \tilde{y}_h + \frac{\tilde{y}_h - \tilde{y}_{2h}}{2^{p_1} - 1}.$$

Om vi använder Heuns metod så kan det globala felet skrivas $\tilde{y}_h - y = c_1 h^2 + c_2 h^3 + \dots$ så i detta fall får vi:

$$\hat{y}_{0,5} = \tilde{y}_{0,5} + \frac{\tilde{y}_{0,5} - \tilde{y}_1}{2^2 - 1} = 2{,}031 + \frac{2{,}031 - 2{,}500}{3} = 1{,}8747.$$

Svar:

a) Se ekvation 1.

b) Med $h = 1$, $\tilde{y}_1(2) = 2{,}500$.
Med $h = 0{,}5$, $\tilde{y}_{0,5}(2) = 2{,}031$.

c) Förbättrad uppskattning $\hat{y}_{0,5}(2) = 1{,}8747$.