MdH
IMa

FORMELSAMLING I NUMERISKA METODER

Feluppskattning

Felfortplantningsformeln

$$E_f \approx \left|\frac{\partial f(\tilde{x})}{\partial x_1}\right| \cdot E_1 + \left|\frac{\partial f(\tilde{x})}{\partial x_2}\right| \cdot E_2 + \ldots\ldots + \left|\frac{\partial f(\tilde{x})}{\partial x_n}\right| \cdot E_n$$

Ekvationer

f(x)=0

Newton-Raphsons metod: $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Newton-Raphsons modifierade metod: $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{d}$ där $d \approx f'(a)$

Sekantmetoden: $x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \cdot f(x_n)$

Fixpunktsmetoden: Ekvationen skrivs på formen $x=F(x)$. $x_{n+1} = F(x_n)$.

Metodoberoende feluppskattning: $E_a = \dfrac{E_f}{\min|f'(x)|}$

Ekvationssystem

$Ax=b$

Normer

Vektornormer: $\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$. $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max|x_i|$.

Matrisnormer: $\|A\| = \max_{x\neq 0} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$, $\|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$, $\|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$.

Gauss-elimination

$$((a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} \cdot a_{kj}^{(k)}, \quad k < j \leq n), \quad k < i \leq n), \quad 1 \leq k < n.$$

<u>LU-uppdelning</u>: $A = LU, \quad (l_{ij} = \frac{a_{ij}^{(j)}}{a_{jj}^{(j)}}, \quad j < i), \quad 1 \leq j < n, \qquad u_{ij} = a_{ij}^{(i)}.$

Iterativa metoder

$A=L+D+R$

Jacobis metod: $Dx^{(n+1)} = b - (L+R)x^{(n)}$

Gauss-Seidels metod: $Dx^{(n+1)} = b - Lx^{(n+1)} - Rx^{(n)}$

Feluppskattning

Konditionstal: $k(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$

Störning av högerled: $\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq k(A) \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$

Störning av koefficientmatris: $\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq k(A+\delta A) \frac{\|\delta A\|}{\|A+\delta A\|} \approx k(A+\delta A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$

Interpolation

Newtoninterpolation

$$P(x) = c_1 + c_2(x-x_1) + c_3(x-x_1)(x-x_2) + \ldots\ldots + c_n(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

$e_{\text{trunk}} = -\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$ för något $\xi \in$ I där I är interpolationsintervallet.

$E_{\text{trunk}} \approx |c_{n+1}(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)|$, (kräver en extra punkt).

<u>Ekvidistanta fall</u>

$$P(x_i + th) = y_i + t \cdot \Delta y_i + \frac{t(t-1)}{2} \cdot \Delta^2 y_i + \ldots\ldots + \frac{t(t-1)\cdots(t-n+2)}{(n-1)!} \cdot \Delta^{n-1} y_i$$

$$E_{\text{trunk}} \approx h^n \left| \frac{t(t-1)\cdots(t-n+1)}{n!} \right| \cdot \left| y_{\max}^{(n)} \right| \approx \left| \frac{t(t-1)\cdots(t-n+1)}{n!} \right| \cdot \left| \Delta^n y \right|_{\max}$$

Felgränser vid linjär interpolation:

$$E_{\text{trunk}} = \frac{h^2 |y''|_{\max}}{8} \approx \frac{|\Delta^2 y|_{\max}}{8}, \quad E_{\text{tab}} = E_y$$

Felgränser vid kvadratisk interpolation:

$$E_{\text{trunk}} \approx \frac{|\Delta^3 y|_{\max}}{15}, \quad E_{\text{tab}} = 1.25 E_y$$

Hermiteinterpolation

$$P(x) = c_1 + c_2(x - x_i) + (x - x_i)(x - x_{i+1})(c_3(x - x_i) + c_4(x - x_{i+1})) \text{ där } \begin{cases} c_1 = y_i \\ c_2 = \dfrac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \\ c_3 = \dfrac{k_{i+1} - c_2}{(x_{i+1} - x_i)^2} \\ c_4 = \dfrac{k_i - c_2}{(x_{i+1} - x_i)^2}. \end{cases}$$

Minsta kvadratmetoden

Minstakvadratlösningen till ett överbestämt ekvationssystem $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ ges av normalekvationerna

$$\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{b}.$$

Richardsonextrapolation

Antag att $F(h)$ är en approximation till en storhet A och att trunkeringsfelet

$F(h) - A = c_1 h^{p_1} + c_2 h^{p_2} + \ldots\ldots$

Förbättrade närmevärden fås med

$$\hat{F}(h) = F(h) + \frac{F(h) - F(2h)}{2^{p_1} - 1}, \quad \hat{\hat{F}}(h) = \hat{F}(h) + \frac{\hat{F}(h) - \hat{F}(2h)}{2^{p_2} - 1}, \text{ osv}.$$

Integration

$$I=\int_a^b f(x)dx$$

Trapetsmetoden

$$h=\frac{b-a}{n},\quad x_i=x_0+ih$$

$$T(h)=h(\tfrac{1}{2}f(x_0)+f(x_1)+f(x_2)+\ldots\ldots+f(x_{n-1})+\tfrac{1}{2}f(x_n))$$

$T(h)=\dfrac{T(2h)}{2}+h(f(x_1)+f(x_3)+\ldots\ldots+f(x_{n-1}))$ om $T(2h)$ beräknats förut.

Trunkeringsfel:

$R(h)=\dfrac{(b-a)h^2}{12}f''(\xi)$ för något $\xi\in[a,b]$.

$R(h)=c_1h^2+c_2h^4+\ldots\ldots$ om $f(x)$ är tillräckligt regelbunden.

Tabellfel: $E_{\text{tab}}=(b-a)E_f$

Simpsons formel

n skall vara ett jämnt tal.

$$S(h)=\frac{h}{3}(f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+\ldots\ldots+4f(x_{n-1})+f(x_n))$$

Rombergs metod

Trapetsmetoden kombineras med Richardson-extrapolation:

$\hat{T}(h)=T(h)+\dfrac{T(h)-T(2h)}{3}$ $\qquad(S(h)=\hat{T}(h))$

$\hat{\hat{T}}(h)=\hat{T}(h)+\dfrac{\hat{T}(h)-\hat{T}(2h)}{15}$ osv så långt som extrapolationstabellen är regelbunden.

$E_{\text{trunk}}=|\overline{T}(h)-\overline{T}(2h)|$ där $\overline{T}(h)$ är det accepterade värdet.

Differentialekvationer

Begynnelsevärdesproblem

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(a) = c \end{cases}$$

Eulers metod

$$y_0 = c, \quad x_{n+1} = x_n + h$$
$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), \; n = 0,1,2,\ldots$$

Globalt fel: $y_n - y(x_n) = c_1 h + c_2 h^2 + \ldots\ldots\ldots$

Heuns metod

$$y_0 = c, \quad x_{n+1} = x_n + h$$

I varje steg beräknas

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_n, y_n) \\ k_2 &= hf(x_n + h, y_n + k_1) \\ y_{n+1} &= y_n + ½(k_1 + k_2) \end{aligned}$$

Globalt fel: $y_n - y(x_n) = c_1 h^2 + c_2 h^3 + \ldots\ldots\ldots$

Runge-Kuttas (klassiska) metod

$$y_0 = c, \quad x_{n+1} = x_n + h$$

I varje steg beräknas

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_n, y_n) \\ k_2 &= hf(x_n + ½h, y_n + ½k_1) \\ k_3 &= hf(x_n + ½h, y_n + ½k_2) \\ k_4 &= hf(x_n + h, y_n + k_3) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{aligned}$$

Globalt fel: $y_n - y(x_n) = c_1 h^4 + c_2 h^5 + \ldots\ldots\ldots$

Randvärdesproblem

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(a) = \alpha \\ y(b) = \beta \end{cases}$$

Inskjutningsmetoden

Problemet skrivs som begynnelsevärdesproblem:

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(a) = \alpha \\ y'(a) = \gamma_k \end{cases} \qquad \text{Lösning: } y^{(k)}(x)$$

Låt $\beta_k = y^{(k)}(b)$.
Gissa γ_1 och γ_2. γ_k, $k = 3,4,\ldots$ beräknas med

$$\gamma_{k+1} = \gamma_k - t_k, \text{ där } t_k = \frac{\gamma_k - \gamma_{k-1}}{\beta_k - \beta_{k-1}}(\beta_k - \beta).$$

Differensapproximation

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad x_i = x_0 + ih.$$

$y(x_i)$ approximeras med y_i, $y'(x_i)$ enklast med $\dfrac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$ och $y''(x_i)$ med $\dfrac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$.

Insättning i randvärdesproblemet ger ekvationssystemet $\boldsymbol{Ay} = h^2\boldsymbol{F}(\boldsymbol{y}) - \boldsymbol{c}$ där $\boldsymbol{A}$ har bandstruktur.

Matematik

Serier

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!}f'''(a) + \ldots\ldots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\ldots \qquad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots\ldots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots\ldots \qquad \sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + \ldots\ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots\ldots \qquad (1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \ldots\ldots$$

$$\left|\sum_{n+1}^{\infty} a_k\right| < |a_{n+1}|$$ vid avtagande termer med alternerande tecken.

$$\left|\sum_{n+1}^{\infty} a_k\right| \le \int_n^{\infty} f(x)dx$$ om $|a_k| \le f(k)$.

Trigonometri

$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

Integraler

$$\int\frac{dx}{1+x^2} = \arctan x, \qquad \int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x, \qquad \int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi} \qquad \int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2} \qquad \int_0^{\pi}\frac{dx}{1+a\cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}$$

Övriga formler

Båglängden$=\int\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$. Krökningen$=\dfrac{1}{R}=\dfrac{f''(x)}{(1+f'(x)^2)^{1.5}}$.

$\pi \approx 3.14159\,26535\,89793\,23846$, $\qquad e \approx 2.71828\,18284\,59045\,23536$

Sammanställd av Lennart Egnesund, november 1997.
Ändrad i januari 1998 och i december 1999.