MÄLARDALENS HÖGSKOLA
Akademin för utbildning, kultur och kommunikation
Avdelningen för tillämpad matematik
Examinator: Karl Lundengård

TENTAMEN I MATEMATIK
MMA132 Numeriska Metoder
Datum: 13 jan 2014
Skrivtid: 4 timmar

Hjälpmedel: Miniräknare, penna, linjal, radermedel samt formelsamling på 7 sidor som bifogas till tentamen.

Tentamen består utav 5 uppgifter värda upp till 5 poäng stycket. För uppgifter som består av flera delar är maxpoängen för varje del angiven. För att få högsta poäng på en uppgift krävs att ett korrekt och tydligt angivet svar och en klar beskrivning av hur lösningen är strukturerad och vilka ekvationer och samband som används. Uppgifterna är ungefärligt ordnade efter svårighetsgrad.
Betygsgränser: Betyg 3: 13 poäng, Betyg 4: 19 poäng, Betyg 5: 22 poäng, Maxpoäng: 25

1. Låt

$$f(x) = \sin(x)\cos(x)\sqrt{x}(4-x)^2 + \arctan(x)$$

a) Hitta ett värde a sådant att $f(a) \approx 0$ genom att använda sekantmetoden. Notera att $f(1) > 0$ och att $f(2) < 0$. Gör fyra iterationer med sekantmetoden. Använd radianer. (4 p)

b) Jämför värdena du fick i a) med varandra. Ser sekantmetoden ut att konvergera? (1 p)

2. Låt I vara värdet av följande integral:

$$I = \int_0^6 x\big(x^2 + \sin(x)\big)\,\mathrm{d}x$$

a) Beräkna ett approximativt värde på I med trapetsmetoden och steglängd $h = 1{,}5$. Använd radianer. (4 p)

b) Med analytiska metoder kan man visa att

$$I = 324 + \sin(6) - 6\cos(6).$$

Hur många korrekta siffror har svaret i a)? (1 p)

3. Betrakta följande matrisekvation.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ -3 & 6 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 6 & 1 \\ 11 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 9 \\ 0 \\ 39 \end{pmatrix}$$

a) Skriv om matrisekvationen så att matrisen blir diagonaldominant. (1 p)

b) Hitta en approximativ lösning till ekvationen genom att göra två iterationer av antingen Jacobis metod eller Gauss-Seidels metod. (4 p)

Fortsätter på andra sidan, Var God Vänd →

4. Hitta ett polynom med lägsta möjliga grad som går genom följande punkter:

x	1	4	7	12
y	-2	22	100	-90

5. Betrakta följande begynnelsevärdes problem:

$$\begin{cases} y''(x) = \dfrac{x+2}{x}y'(x) - \dfrac{x+2}{x^2}y(x) \\ y(1) = 0{,}5 \\ y'(1) = 0 \\ 1 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

a) Uppskatta $y(4)$ genom att ta använda Eulers metod och steglängden $h = 1$. (2 p)

b) Hitta med hjälp utav resultatet i a) och en iteration av inskjutningsmetoden ett värde på $y'(1)$ som ger $y(4) \approx 0$. (3 p)

LYCKA TILL!

Lösningsförslag

1. $f(x) = \sin(x)\cos(x)\sqrt{x}(4-x)^2 + \arctan(x)$

a) Sekantmetoden har iterationsformeln

$$a_{n+1} = a_n - \frac{a_n - a_{n-1}}{f(a_n) - f(a_{n-1})} f(a_n)$$

Med $a_0 = 1$ och $a_1 = 2$ fås:

$$a_2 = a_1 - \frac{a_1 - a_0}{f(a_1) - f(a_0)} f(a_1) = 1.8252$$

$$a_3 = a_2 - \frac{a_2 - a_1}{f(a_2) - f(a_1)} f(a_2) = 1.6696$$

$$a_4 = a_3 - \frac{a_3 - a_2}{f(a_3) - f(a_2)} f(a_3) = 1.7338$$

$$a_5 = a_4 - \frac{a_4 - a_3}{f(a_4) - f(a_3)} f(a_4) = 1.7278$$

b) Värdena på a_2, a_3, a_4 börjar alla på samma siffra och andra siffran ligger ganska nära varandra. Jämför vi sedan a_4 och a_5 är skillnaden mindre än mellan de andra iterationerna och därför verkar som om metoden konvergerar. Naturligtvis är detta inget bevis för konvergens.

2. $I = \int_0^6 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^6 x\big(x^2 + \sin(x)\big)\mathrm{d}x$

a) Steglängd $h = 1{,}5$ ger 5 x-värden: $x_1 = 0$, $x_2 = 1{,}5$, $x_3 = 3$, $x_5 = 4{,}5$ och $x_5 = 6$. Motsvarande värden på integranden är $f(x_1) = 0$, $f(x_2) = 4{,}871$, $f(x_3) = 27{,}42$, $f(x_4) = 86{,}73$ och $f(x_5) = 214{,}3$.
Formeln för trapetsmetoden ger:

$$\tilde{I} = h\left(\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) + \frac{1}{2}f(x_5)\right) = 339{,}3$$

b) Här är det enkelt att testa sig fram. $\tilde{I} = 318{,}0$ och alltså är:
$\tilde{I} - 50 < I < \tilde{I} + 50$ vilket ger att första siffran är korrekt.
$I < \tilde{I} - 5 < \tilde{I} + 5$ vilket ger att andra siffran inte är korrekt. Alltså har $\tilde{I}$ bara en korrekt siffra.

3. a) Matrisekvationen kan skrivas om genom att man byter plats på första och sista raden.

$$\begin{pmatrix} 11 & 6 & 3 & 1 \\ -3 & 6 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 39 \\ 9 \\ 0 \\ 13 \end{pmatrix}$$

b) Standardformlerna i formelsamlingen kan användas då

$$D = \begin{pmatrix} 11 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Jacobis metod:
Med initialgissningen $\tilde{x}_0 = (2,2,2,2)$ fås

$$\tilde{x}_1 = D^{-1}(y - (L+R)\tilde{x}_0) = \begin{pmatrix} 1{,}727 \\ 1{,}833 \\ 1{,}000 \\ 1{,}750 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{x}_2 = D^{-1}(y - (L+R)\tilde{x}_1) = \begin{pmatrix} 2{,}114 \\ 1{,}905 \\ 0{,}8952 \\ 2{,}110 \end{pmatrix}$$

Gauss-Seidels metod: Med initialgissningen $\tilde{x}_0 = (2,2,2,2)$ fås

$$\tilde{x}_1 = D^{-1}(y - (L+R)\tilde{x}_0) = \begin{pmatrix} 1{,}727 \\ 1{,}697 \\ 0{,}8081 \\ 2{,}192 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{x}_2 = D^{-1}(y - (L+R)\tilde{x}_1) = \begin{pmatrix} 2{,}200 \\ 2{,}100 \\ 1{,}068 \\ 1{,}908 \end{pmatrix}$$

4. Du kan använda vilken interpolationsmetod du vill. Eftersom vi har 4 punkter räcker det med ett polynom av grad 3.

$$p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$$

Här används Newton-interpolation.

$$p(x) = c_1 + c_2(x - x_1) + c_3(x - x_1)(x - x_2) + c_4(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = c_1 \\ y_2 = c_1 + c_2(x_2 - x_1) \\ y_3 = c_1 + c_2(x_3 - x_1) + c_3(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) \\ y_4 = c_1 + c_2(x_4 - x_1) + c_3(x_4 - x_1)(x_4 - x_2) + c_4(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & (x_2 - x_1) & 0 & 0 \\ 1 & (x_3 - x_1) & (x_3 - x_1)(x_3 - x_2) & 0 \\ 1 & (x_4 - x_1) & (x_4 - x_1)(x_4 - x_2) & (x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

Nedanstående system skall alltså lösas, detta kan göras med vilken metod man vill men eftersom den är triangular kan bakåtsubstitution användas.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 6 \cdot 3 & 0 \\ 1 & 11 & 11 \cdot 8 & 11 \cdot 8 \cdot 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 22 \\ 100 \\ -90 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Alltså

$$p(x) = -2 + 8(x-1) + 3(x-1)(x-3) - 2(x-1)(x-3)(x-7) = 30 - 46x + 15x^2 - x^3$$

5.

$$\begin{cases} y''(x) = \dfrac{x+2}{x} y'(x) - \dfrac{x+2}{x^2} y(x) \\ y(1) = 0{,}5 \\ y'(1) = 0 \\ 1 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

a) För att kunna använda Eulers metod så måste andra ordningens differentialekvationer skrivas om som ett system av första ordningens differentialekvationer. Låt

$y(x) = u(x)$ och $y'(x) = v(x)$. Då fås systemet:

$$\begin{cases} u'(x) = v \\ v'(x) = \dfrac{x+2}{x} v(x) - \dfrac{x+2}{x^2} u(x) \\ u(1) = 0{,}5 \\ v(1) = 0 \\ 1 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

Eulers metod ger

$$\begin{pmatrix} \tilde{u}(2) \\ \tilde{v}(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(1) \\ v(1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v(1) \\ \frac{1+2}{1} v(1) - \frac{1+2}{1^2} u(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -1{,}5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{u}(3) \\ \tilde{v}(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{u}(2) \\ \tilde{v}(2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{v}(2) \\ \frac{2+2}{2} \tilde{v}(2) - \frac{2+2}{2^2} \tilde{u}(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{u}(4) \\ \tilde{v}(4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{u}(3) \\ \tilde{v}(3) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{v}(3) \\ \frac{3+2}{3} \tilde{v}(3) - \frac{3+2}{3^2} \tilde{u}(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -12{,}78 \end{pmatrix}$$

Alltså: $\tilde{y}(4) = -6$

b) För att använda inskjutningsmetoden behöver vi räkna ut $\tilde{y}(4)$ för två olika värden på $y'(1)$. Vi kan använda resultatet från a) för den ena och välja ett annat värde slumpmässigt. Med $y_2'(1) = 1$ fås

$$\begin{pmatrix} \tilde{u}(2) \\ \tilde{v}(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(1) \\ v(1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v(1) \\ \frac{1+2}{1} v(1) - \frac{1+2}{1^2} u(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{u}(3) \\ \tilde{v}(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{u}(2) \\ \tilde{v}(2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{v}(2) \\ \frac{2+2}{2} \tilde{v}(2) - \frac{2+2}{2^2} \tilde{u}(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{u}(4) \\ \tilde{v}(4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{u}(3) \\ \tilde{v}(3) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{v}(3) \\ \frac{3+2}{3} \tilde{v}(3) - \frac{3+2}{3^2} \tilde{u}(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 13{,}78 \end{pmatrix}$$

En approximation på ett lämpligt värde på $y'(1) = a$ kan sedan räknas fram med sekantmetoden. Värden från a) betecknas med index 1.

$$\tilde{a} = y_2'(1) - \frac{y_2'(1) - y_1'(1)}{y_2(4) - y_1(4)} y_2(4) = 0{,}4812$$