Lösningar till tentamen 2010-05-31
MMA132 Numeriska metoder

① Gausselimination ger att $A = LR$, där

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.83335 & 1 & 0 \\ 0.71430 & 1.49874 & 1 \end{bmatrix}$$ och

$$R = \begin{bmatrix} 0.200000 & 0.16667 & 0.14286 \\ 0 & 0.00397 & 0.00595 \\ 0 & 0 & 0.00015 \end{bmatrix}$$ då

elementen avrundats till 5 xd efter hand som de beräknats.

Systemen $Ax = b$ skall lösas med högerleden $b = \begin{bmatrix} 0.50953 \\ 0.43453 \\ 0.37897 \end{bmatrix}$ och $\tilde{b} = \begin{bmatrix} 0.50958 \\ 0.43449 \\ 0.37900 \end{bmatrix}$

genom att använda LR faktoriseringen.

Sätt $Rx = y$ då översår $Ax = b$ till

$$\begin{cases} Ly = b \\ Rx = y \end{cases}$$

$Ly = b$ har lösningen

$$y = \begin{bmatrix} 0.50953 \\ 0.00991 \\ 0.00016 \end{bmatrix}$$

och $Ux = y$ lösningen

$$x = \begin{bmatrix} 1.02086 \\ 0.94383 \\ 1.03633 \end{bmatrix}.$$

med högerledet $\tilde{b}$ erhålls

$$\tilde{y} = \begin{bmatrix} 0.50958 \\ 0.00983 \\ 0.00027 \end{bmatrix}$$

och

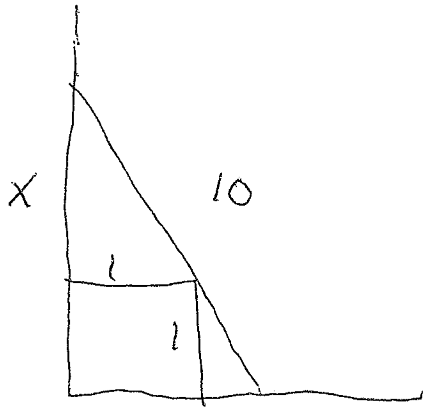
$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} 1.45417 \\ -0.24260 \\ 1.81422 \end{bmatrix}$$

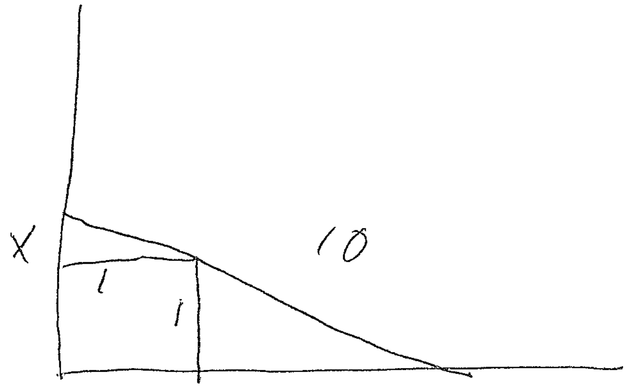
$$\|b - \tilde{b}\| \approx 0.5 \cdot 10^{-4}$$

$$\|x - \tilde{x}\| \approx 1.2$$

Systemmatrisen A är alltså dåligt konditionerad.

(2) Finns två lösningar





Pythagoras sats och likformighet ger ekvationen $x^4+2x^3-98x^2+2x+1=0$

Kalla $p(x)=x^4+2x^3-98x^2+2x+1$

Då är $p(0.1)>0$ $p(1)<0$ och

$p(8)<0$ $p(9)>0$.

Finns nollställe mellan 0.1 och 1 samt mellan 8 och 9.

Newton-Raphson $x_{n+1}=x_n-\dfrac{p(x_n)}{p'(x_n)}$

$$x_{n+1}=x_n-\frac{x_n^4+2x_n^3-98x_n^2+2x_n+1}{4x_n^3+6x_n^2-196x_n+2}.$$

Med $x_0=8.5$ fås följden

8.5 8.8 8.944 8.938 8.938.

Andra lösningen fås på samma sätt till 0.112

$\left(=\dfrac{1}{8.938}\right)$

③ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} dx$

Trapetsmetoden ger

h	$T(h)$	$\frac{\Delta}{3}$	$T_1(h)$
$\frac{\pi}{2}$	2,920332		
		0,044237	3,097281
$\frac{\pi}{4}$	3,053044		
		0,012828	3,104357
$\frac{\pi}{8}$	3,091529		
		0.003212	3.104378
$\frac{\pi}{16}$	3,10166		

$|3.104378 - 3.104357| = 0.000021$ so

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} dx = 3,1044 \pm 0,00003 \quad dw$$

värdet är 3,1044 med 4 kd

(4) $L = L_0 + a(T-T_0)L_0$

Sätt $b = aL_0$ så $L = L_0 + b(T-T_0)$

T_0 given till 30 så $L = L_0 + b(T-30)$

~~med~~ $L-1 = L_0 - 1 + b(T-30)$

Sätt $L_1 = L_0 - 1$ så fås

$L-1 = L_1 + b(T-30)$.

Tabellvärdena leder till

$$\begin{pmatrix} 1 & -20 \\ 1 & -10 \\ 1 & 0 \\ 1 & 10 \\ 1 & 20 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} L_1 \\ b \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -0.97 \\ 0.24 \\ 1.45 \\ 2.63 \\ 3.85 \end{pmatrix} \cdot 10^{-4}$$

som saknar lösningar. Utjämnade systemet blir

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 \\ b \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 7.2 \\ 120.3 \end{pmatrix} 10^{-4}$$ som har

Lösningen $L_1 = 1.44 \cdot 10^{-4}$, $b = 0.1203 \cdot 10^{-4}$..

Detta ger $L_0 = L_1 + 1 = 1.000144$ och

$$a = \frac{b}{L_0} = \frac{0.1203 \cdot 10^{-4}}{1.000144} = 0.12 \cdot 10^{-4}.$$

$$L = 1.000144 + 0.12 \cdot 10^{-4}(T-30)\, 1.000144$$

(5) $y'' + 2xy' - x^2 y = x^2$

$y(0) = 1$

$y(1) = 0$ $\qquad\qquad h = 0.25$

x_0	$x_1 = \frac{1}{4}$	$x_2 = \frac{1}{2}$	$x_3 = \frac{3}{4}$	$x_4 = 1$
$y_0 = 1$	y_1	y_2	y_3	$y_4 = 0$

Ersätt $y'(x_n)$ med $\dfrac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h}$ och

$y''(x_n)$ med $\dfrac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2}$ för

$n = 1, 2, 3.$

Leder till differensekvationerna.

$$\frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2} + 2x_n \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h} - x_n^2 y_n = x_n^2$$

eller

$$y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} + h x_n (y_{n+1} - y_{n-1}) - h^2 x_n^2 y_n =$$

$$= h^2 x_n^2$$

$\underline{k=1}$

$$\frac{17}{16}y_2-\left(2+\frac{1}{256}\right)y_1=\frac{1}{256}-1+\frac{1}{16}$$

$\underline{k=2}$

$$\frac{9}{8}y_3-\left(2+\frac{1}{64}\right)y_2+\left(1-\frac{1}{8}\right)y_1=\frac{1}{64}$$

$\underline{k=3}$

$$\left(-2-\frac{9}{256}\right)y_3+\left(1-\frac{3}{16}\right)y_2=\frac{9}{256}$$

Systemet blir

$$\begin{bmatrix} -2.0039 & 1.0625 & 0 \\ 0.8750 & -2.0156 & 1.1250 \\ 0 & 0.8125 & -2.0352 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -0.9336 \\ 0.0156 \\ 0.0352 \end{bmatrix}$$ med lösningen

$y_1 = 0.6451$

$y_2 = 0.3379$

$y_3 = 0.1176$