MMA132 Numeriska metoder

Lösningar till tentamen 2010-08-23

(1) $$\int_1^2 \frac{x^2+1}{x^{12}+x^{24}+1}\,dx$$

Trapetsmetoden och Richardson extrapolation ger:

h	$T(h)$	$\frac{\Delta}{3}$	$T_1(h)$	$\frac{\Delta}{7}$
1	0.3339			
		-0.0517		
0.5	0.1789		0.1272	
		-0.0175		-0.0026
0.25	0.1263		0.1088	
		-0.0041		0.0002
0.125	0.1141		0.1100	

Sista korrektionstermerna ändrar tecken så dessa kan inte användas.

Integralens värde blir

0.110 ± 0.002

(2) $x^2\ln x - x^2 + 1 = 0$ Låt $f(x) = x^2\ln x - x^2 + 1$

Då $f'(x) = 2x\ln x + x^2\frac{1}{x} - 2x = 2x\ln x - x$

Newton Raphson $x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n^2(\ln x_n - 1) + 1}{x_n(2\ln x_n - 1)}$

med startvärdet 2 ger.

2.
2.294350
2.223469
2.218482
2.218457
2.218457 som är lösningen

(3) Insatta värden på x leder till ekvationssystemet

$$\begin{cases} a + b\cdot 0 + c\cdot 1 = 0 \\ a + b\frac{1}{\sqrt{2}} + c\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4} \\ a + b\cdot 1 + c\cdot 0 = \frac{\pi}{2} \\ a + b\frac{1}{\sqrt{2}} - c\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3\pi}{4} \\ a + b\cdot 0 - c\cdot 1 = \pi \end{cases}$$

som saknar lösning.

utjämnade systemet blir

$$\begin{bmatrix} 5 & \sqrt{2}+1 & 0 \\ \sqrt{2}+1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5\pi}{2} \\ \frac{(\sqrt{2}+1)\pi}{2} \\ -\frac{(\sqrt{2}+4)\pi}{4} \end{bmatrix}$$

med lösningen $a = \frac{\pi}{2}$, $b = 0$, $c = \frac{-\pi}{12}(\sqrt{2}+4)$
(≈ -1.4174)

residualvektorn blir

$$\begin{bmatrix} \frac{\pi}{12}(2-\sqrt{2}) \\ \frac{\pi}{12}(5-2\sqrt{2}) - \frac{\pi}{4} \\ 0 \\ \frac{\pi}{12}(7+2\sqrt{2}) - \frac{3\pi}{4} \\ \frac{\pi}{12}(10+2\sqrt{2}) - \pi \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.153 \\ -0.217 \\ 0 \\ 0.217 \\ -0.153 \end{bmatrix}$$

som är ortogonal mot kolonnerna i ursprungliga ekvsyst systemmatris.

4

$$\begin{cases} y'' + xy' - y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

sätt $y_1 = y$ och $y_2 = y'$. De blir

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_1 - xy_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Euler:

$h = 0.4 \quad y(0.4) = 1$

$h = 0.2$

x	$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} y_2 \\ y_1 - xy_2 \end{bmatrix}$	$0.2\begin{pmatrix} y_2 \\ y_1 - xy_2 \end{pmatrix}$
0	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0.2 \end{pmatrix}$
0.2	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0.2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.96 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.04 \\ 0.192 \end{bmatrix}$
0.4	$\begin{bmatrix} 1.04 \\ 0.392 \end{bmatrix}$		

så $y(0.4) \approx 1.04$

med $h = 0{,}1$ fås $y(0{,}4) \approx 1{,}059502$

Richardson extrapolation:

h	$y(0{,}4)$	$\frac{\Delta}{1}$	$y(0{,}4)$	$\frac{\Delta}{3}$
0,4	1	~~0,021~~ 0,04		
			1,08	
0,2	1,04	0,019502		−0,000332
			1,079004	
0,1	1,059502			

$y(0{,}4) \approx 1{,}078672$ (optimistiskt)

Runge-Kutta med $h = 0.4$

x	$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} y_2 \\ y_1 - x y_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$
0	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0.4 \end{bmatrix}$
0.2	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0.2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.96 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.08 \\ 0.384 \end{bmatrix}$
0.2	$\begin{bmatrix} 1.04 \\ 0.192 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.192 \\ 1.0016 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.0768 \\ 0.40064 \end{bmatrix}$
0.4	$\begin{bmatrix} 1.0768 \\ 0.40064 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.40064 \\ 0.916544 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.160256 \\ 0.366618 \end{bmatrix}$

så $y(0.4) \approx 1 + \dfrac{0 + 2 \cdot 0.08 + 2 \cdot 0.0768 + 0.160256}{6}$

$= 1 + 0.078976 \simeq 1.078976$

(5) A kan skrivas som $A = I + M_1$ där

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ (enhetsmatrisen) och

$$M_1 = \begin{bmatrix} -0.05 & 0.06 & 0.00 & 0.01 \\ 0.06 & -0.05 & 0.03 & 0.04 \\ 0.00 & 0.03 & -0.05 & 0.00 \\ 0.01 & 0.04 & 0.00 & -0.05 \end{bmatrix}.$$

$Ax = b$ skrivs om

$Ix + M_1 x = b$; $x = -M_1 x + b$

med $M = -M_1$ får vi

$x = Mx + b$ där

$$M = 10^{-2} \begin{bmatrix} 5 & -6 & 0 & -1 \\ -6 & 5 & -3 & -4 \\ 0 & -3 & 5 & 0 \\ -1 & -4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

och $$b = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

Med startvektorn 0 och genom att använda de nya värdena i högerledet erhålls

x_1	0	0.5	0.49	0.492	0.4921	0.4921
x_2	0	0.5	0.46	0.458	0.4379	0.4579
x_3	0	0.5	0.51	0.512	0.5119	0.5119
x_4	0	0.5	0.50	0.502	0.5019	0.5019

Lösningen med 4 nd är alltså

$$x = \begin{pmatrix} 0.4921 \\ 0.4579 \\ 0.5119 \\ 0.5019 \end{pmatrix}$$