MMA132 Numeriska metoder
Lösningar till tentamen 2010-11-01

(2) För att bestämma roten till ekv $x^3-2x^2+3x-4=0$ i närheten av 1.7 skall fixpunktsmetoden försökas då iterationsfunktionen g är

A: $g(x)=\sqrt{0.5x^3+1.5x-2}$

B: $g(x)=\frac{1}{3}(4+2x^2-x^3)$.

Villkor för konvergens med startvärdet 1.7 är att $|g'(1.7)|<1$.

I A är $g'(x)=\dfrac{1.5x^2+1.5}{2\sqrt{0.5x^3+1.5x-2}}$ så

$g'(1.7)\approx 1.68$.

I B är $g'(x)=\frac{1}{3}(4x-3x^2)$ så

$g'(1.7)=-0.6233$.

Konvergens i B. Iterationerna blir
1.6223, 1.6647, 1.6431, 1.6545,
1.6486, 1.6517, 1.6501, 1.6509,
1.6505.

Roten är alltså 1.651 med 3 kd

1

$$\int_{0.2}^{0.6} \ln(1+\sin^2 x)\,dx$$

0.2	0.019355			
0.25				0.059409
0.3			0.083727	
0.35				0.111165
0.4		0.141193		
0.45				0.173277
0.5			0.206891	
0.55				0.241535
0.6	0.138369			
	0.157724	0.298917	0.589535	1.174921

h	$T(h)$	$\frac{D}{3}$	$T_1(h)$	$\frac{D}{5}$
0.4	0.063090			
		−0.001102		
0.2	0.059783		0.058681	
		−0.000276		0
0.1	0.058954		0.058678	
				0
0.05	0.058746	−0.000069	0.058677	

$$0.058677 \pm \overbrace{(0.058677-0.058678)}^{0.1\ 10^{-5}}$$

$$\int_{0.2}^{0.6} \ln(1+\sin^2 x)\,dx = 0.05868 \quad (5\text{kd})$$

③ Gausselimination utav A ger LR faktoriseringen.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -3 & -3 \\ 2 & 4 & 8 & 7 \\ -2 & -2 & -8 & -5 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 & -2 & 2 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} -1 \end{matrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = R$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

För att lösa $Ax = b$ dvs $LRx = b$ sätt $y = Rx$.

Lös $Ly = b$ och sen $Rx = y$.

$Ly = b$: $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -10 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & -10 \\ -2 & 1 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right]$ ger $y = \begin{bmatrix} -10 \\ -8 \\ 10 \\ -4 \end{bmatrix}$

$Rx = y$: $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & -10 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right]$ ger $x = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$

(4) utöka tabellen med $\cos \omega t$ där $\omega = \frac{4\pi}{3}$:

t	0.3	1.1	2.5	3.8	5.1
$\cos \omega t$	0.3090	−0.1045	−0.5000	−0.9781	−0.809
$N(t)$	5.7	6.4	8.4	10.5	12.1

Tabellen ger med ansatsen

$$N(t) = A + Bt + \cos \omega t$$

ekvationssystemet:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0.3 & 0.3090 \\ 1 & 1.1 & -0.1045 \\ 1 & 2.5 & -0.5000 \\ 1 & 3.8 & -0.9781 \\ 1 & 5.1 & -0.8090 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}}_{\underline{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5.7 \\ 6.4 \\ 8.4 \\ 10.5 \\ 12.1 \end{pmatrix}}_{\underline{b}}$$

Minsta-kvadratmetoden:

$A^T A \underline{x} = A^T \underline{b}$ eller

$$\begin{pmatrix} 5 & 12.8 & -2.083 \\ 12.8 & 48 & -9.115 \\ -2.083 & -9.115 & 1.968 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 43.1 \\ 131.4 \\ -23.17 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 5.1 \\ 1.4 \\ 0.048 \end{pmatrix}$$

⑤

$$Ly'' = -2gy - \mu y' \qquad L=1,\ \mu=0.8,\ g=9.8$$

$$\begin{cases} y'' = -19.6y - 0.8y' \\ y(0) = 0.1 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \qquad y(0.2) \text{ sökt}$$

Sätt $\begin{cases} y_1 = y \\ y_2 = y' \end{cases}$ Då $\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -19.6y_1 - 0.8y_2 \end{cases}$ $\begin{cases} y_1(0) = 0.1 \\ y_2(0) = 0 \end{cases}$

Runge Kutta med steglängden 0.2 ger

x	$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} y_2 \\ -19.6y_1 - 0.8y_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$
0	$\begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ -1.96 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ -0.392 \end{bmatrix}$
0.1	$\begin{bmatrix} 0.1 \\ -0.196 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.196 \\ -1.8032 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.0392 \\ -0.36064 \end{bmatrix}$
0.1	$\begin{bmatrix} 0.0804 \\ -0.18032 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.18032 \\ -1.431584 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.036064 \\ -0.286317 \end{bmatrix}$
0.2	$\begin{bmatrix} 0.063936 \\ -0.286317 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.286317 \\ -1.024092 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.057263 \\ -0.204818 \end{bmatrix}$

$$y_1(0.2) = 0.1 + \frac{1}{6}\left(1\cdot 0 + 2\cdot(-0.0392) + 2(-0.036064) - 0.057263\right)$$

$$= 0.1 - 0.034632 = 0.065368 \approx 0.065$$