MMA132 Numeriska metoder

Lösningar till tentamen 2011-01-17

---

①
$$\begin{cases} 4x_1^{(n+1)} = & -2x_3^{(n)} + 5 \\ 3x_2^{(n+1)} = -x_1^{(n+1)} & + 2 \\ 6x_3^{(n+1)} = -x_1^{(n+1)} - x_3^{(n+1)} & + 3 \end{cases}$$

n	0	1	2	3	4	5
x_1	0	~~0.125~~ 1.25	1.125	1.1180	1.1177	1.1177
x_2	0	0.25	0.292	0.2940	0.2941	0.2941
x_3	0	0.25	0.264	0.2647	0.2647	0.2647

Lösningen från Gauss-Seidels metod är alltså

$$x = \begin{bmatrix} 1.1177 \\ 0.2941 \\ 0.2647 \end{bmatrix}$$ med 4 kd

Från A^{-1} erhålls lösningen

$$x = A^{-1} b = \begin{bmatrix} \frac{38}{34} \\ \frac{10}{34} \\ \frac{9}{34} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1.1176 \\ 0.2941 \\ 0.2647 \end{bmatrix}$$

som visar att lösningen med Gauss-Seidel är korrekt med 4 kd.

Med A^{-1} fås lösningen till det störda systemet $Ax = \tilde{b}$ till

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} 1.1276 \\ 0.2841 \\ 0.2697 \end{bmatrix} \qquad (\tilde{x} = A^{-1}\tilde{b})$$

Relativa felet är $\dfrac{\|\tilde{x} - x\|}{\|x\|} \leq 0.01$.

Gränsen för relativa felet baserat på konditionstalet för matrisen A

är $$\frac{\|\tilde{x} - x\|}{\|x\|} \leq \|A\| \, \|A^{-1}\| \frac{\|\tilde{b} - b\|}{\|b\|} \leq$$

$$\leq 8 \cdot \frac{30}{68} \cdot \frac{0.05}{5} \leq 0.04 .$$

(2) $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} e^{-x^2} dx$

med trapetsmetoden för

T(0.25) = 0.712260 och

T(0.125) = 0.715117.

Extrapolerat värde blir 0.716069

$\int_1^3 \frac{\sin x}{x} e^{-x^2} dx$

Trapetsmetoden ger

T(0.5) = 0.116831 och

T(0.25) = 0.105339.
Extrapolerat värde 0.101508
Alltså är

$$\int_0^3 \frac{\sin x}{x} e^{-x^2} dx = 0.8176 \text{ med 4kd}$$

3. med referenstidpunkten $t_0 = 14$ och $b_0 = a_0 - 9.81$ fås det överbestämda ekvationssystemet

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 8 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0 \\ b_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 47 \\ 69 \\ 91 \\ 121 \\ 148 \end{bmatrix}.$$

Det utjämnade systemet blir

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 20 \\ 0 & 40 & 0 \\ 20 & 0 & 136 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0 \\ b_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 476 \\ 508 \\ 1940 \end{bmatrix}$$

med lösningen $v_0 = 92.6$ $b_0 = 12.7$ och $a_1 = 0.643$,

Alltså är
$$v_0 = 92.6$$
$$a_0 = 22.5$$
$$a_1 = 0.64$$

4)

Ansätt

$$p(x) = c_0 + c_1(x-1) + c_2(x-1)(x-2) + c_3(x-1)(x-2)(x-3$$

$$p(1) = f(1) = \underbrace{-1.91 = c_0}$$

$$p(2) = f(2) = -0.83 = -1.91 + c_1 \quad \text{ger} \quad \underbrace{c_1 = 1.08}$$

$$p(3) = f(3) = 0.36 = -1.91 + 1.08(3-1) + c_2(3-1)(3-2)$$

$$\text{ger} \quad \underbrace{c_2 = 0.055}$$

$$p(4) = f(4) = 1.65 = -1.91 + 1.08 \cdot (4-1) + 0.055(4-1)(4-2) + c_3(4-1)(4-2)(4-3) \quad \text{ger}$$

$$\underbrace{c_3 = -0.001667}$$

$$p(x) = -1.91 + 1.08(x-1) + 0.055(x-1)(x-2) - 0.001667(x-1)(x-2)(x-3)$$

Nollstället till f ligger mellan 2 och 3

Sekantmetoden $x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n - x_{n-1}}{p(x_n) - p(x_{n-1})} p(x_n)$

$x_0 = 2 \quad x_1 = 3$ ger $x_2 = 3 - \dfrac{3-2}{0.36-(-0.83)} 0.36 = 2.697$

$$x_3 = 2.697 - \frac{2.697 - 3}{p(2.697) - 0.36} p(2.697)$$

$p(2.697) = -0.011588$ så $x_3 = 2.706 \approx 2.71$

Nollstället är ungefär 2.71

$h = 0.05$

$$\begin{cases} x_1 = 1 + 0.05 \dfrac{-2 \cdot 1}{\sqrt{1+0}} = 0.9 \\[2ex] y_1 = 0 + 0.05 \left(1 - \dfrac{2 \cdot 0}{\sqrt{1+0}}\right) = 0.05 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 0.9 + 0.05 \dfrac{-2 \cdot 0.9}{\sqrt{0.9^2 + 0.05^2}} = 0.800154 \\[2ex] y_2 = 0.05 + 0.05 \left(1 - \dfrac{2 \cdot 0.05}{\sqrt{0.9^2 + 0.05^2}}\right) = 0.094453 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = 0.800154 + 0.05 \dfrac{-2 \cdot 0.800154}{\sqrt{0.800154^2 + 0.094453^2}} = 0.700844 \\[2ex] y_3 = 0.094453 + 0.05 \left(1 - \dfrac{2 \cdot 0.094453}{\sqrt{}}\right) = 0.132730 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_4 = 0.700844 + 0.05 \dfrac{-2 \cdot 0.700844}{\sqrt{0.700844^2 + 0.132730^2}} = 0.602591 \\[2ex] y_4 = 0.132730 + 0.05 \left(1 - \dfrac{2 \cdot 0.132730}{\sqrt{}}\right) = 0.164122 \end{cases}$$

$(x(0.2), y(0.2)) = (0.602591, 0.164122)$