UKK TENTAMEN 2011-01-17

MMA132 Numeriska metoder

Skrivningstid: **4 timmar**

Hjälpmedel: **Formelsamling i numeriska metoder, hophäftad med 7 sidor**

Valfri miniräknare

Ansvarig lärare: **Torgöt Berling 021 – 10 13 82**

Tentamen består av 5 uppgifter a 5 poäng. Betygsgränserna är: Betyg 3, 11 poäng, betyg 4, 16 poäng, betyg 5, 21 poäng.

För att få poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl strukturerad och att ekvationer, samband och slutsatser förklaras.

LYCKA TILL !

Uppgift 1
Bestäm en lösning med 4 korrekta decimaler till ekvationssystemet $Ax = b$ iterativt med Gauss-Seidels metod då

$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ och $b = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Startvektorn skall vara 0 och varje iteration skall redovisas med minst 4 decimaler.
Inversen till matrisen A är

$A^{-1} = \frac{1}{68}\begin{bmatrix} 18 & 2 & -6 \\ -6 & 22 & 2 \\ -2 & -4 & 12 \end{bmatrix}$

Använd inversen för att verifiera att lösningen från iterationen är rimlig.

Högerledet störs till $\tilde{b} = \begin{bmatrix} 5.05 \\ 1.98 \\ 3.03 \end{bmatrix}$.

Lös det störda systemet $A\tilde{x} = \tilde{b}$ genom att beräkna $\tilde{x} = A^{-1}\tilde{b}$.
Bestäm det relativa felet i lösningen och jämför detta med den gräns för relativa felet som ges av konditionstalet för matrisen A , använd genomgående oändlighetsnormer (maximinormer).

Uppgift 2
Integralen $\int_0^3 \frac{sinx}{x} e^{-x^2} dx$ skall beräknas med 4 korrekta decimaler.

Integrationen skall delas upp i två steg, ett steg från 0 till 1 och ett steg från 1 till3.
Funktionsvärdet för x=0 sätts till 1.

Använd trapetsmetoden och Richardsonextrapolation. Det räcker med steglängderna 0.25 och 0.125 för integration mellan 0 och 1 samt steglängderna 0.5 och 0.25 för integration mellan 1 och 3. Räkna med minst 6 decimaler.
OBS: Glöm inte att ställa om till radianer.

FORTSÄTTNING PÅ NÄSTA SIDA

Uppgift 3
En lodrät stigande raket har följande tidsutveckling för hastigheten i tidsintervallet $10 \leq t \leq 18$:

t:	10	12	14	16	18
$v(t)$:	47	69	91	121	148

Den effektiva accelerationen (inklusive gravitation) växer linjärt med tiden dvs accelerationens och hastighetens tidsberoende kan skrivas som:
$a(t) = a_0 + a_1(t - t_0) - 9.81$ respektive $v(t) = v_0 + (a_0 - 9.81)(t - t_0) + a_1 \frac{(t-t_0)^2}{2}$.
Bestäm med minsta kvadratmetoden de tre konstanterna v_0 , a_0 , a_1 genom att anpassa uttrycket för $v(t)$ till de givna värdena och referenstidpunkten $t_0 = 14$.

Uppgift 4
Följande funktionsvärden till funktionen *f* är givna:

x	1	2	3	4
$f(x)$	-1.91	-0.83	0.36	1.65

Bestäm ett interpolationspolynom *p* av graden 3 till *f*. Använd detta polynom för att bestämma ett approximativt värde på nollstället till funktionen genom att göra två iterationssteg med sekantmetoden och två lämplig startvärden.
Ledning: Nollstället tycks ligga mellan 2 och 3.

FORTSÄTTNING PÅ NÄSTA SIDA

Uppgift 5
En partikels plana rörelse kan beskrivas med de kopplade differentialekvationerna och begynnelsevärdena:

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{-2x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ y'(t) = 1 - \frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases} \qquad \begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Genom att tillämpa Eulers metod kan systemet skrivas om till

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h\frac{-2x_n}{\sqrt{x_n^2+y_n^2}} \\ y_{n+1} = y_n + h\left(1 - \frac{2y_n}{\sqrt{x_n^2+y_n^2}}\right) \end{cases} \quad \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} t_0 = 0 \\ t_{n+1} = t_n + h \end{cases}$$

Använd rekursionsformlerna ovan för att bestämma läget vid tidpunkten $t = 0.2$. Använd stegtiden $h = 0.05$.
Räkna med minst 6 decimaler och svara med 4 decimaler.